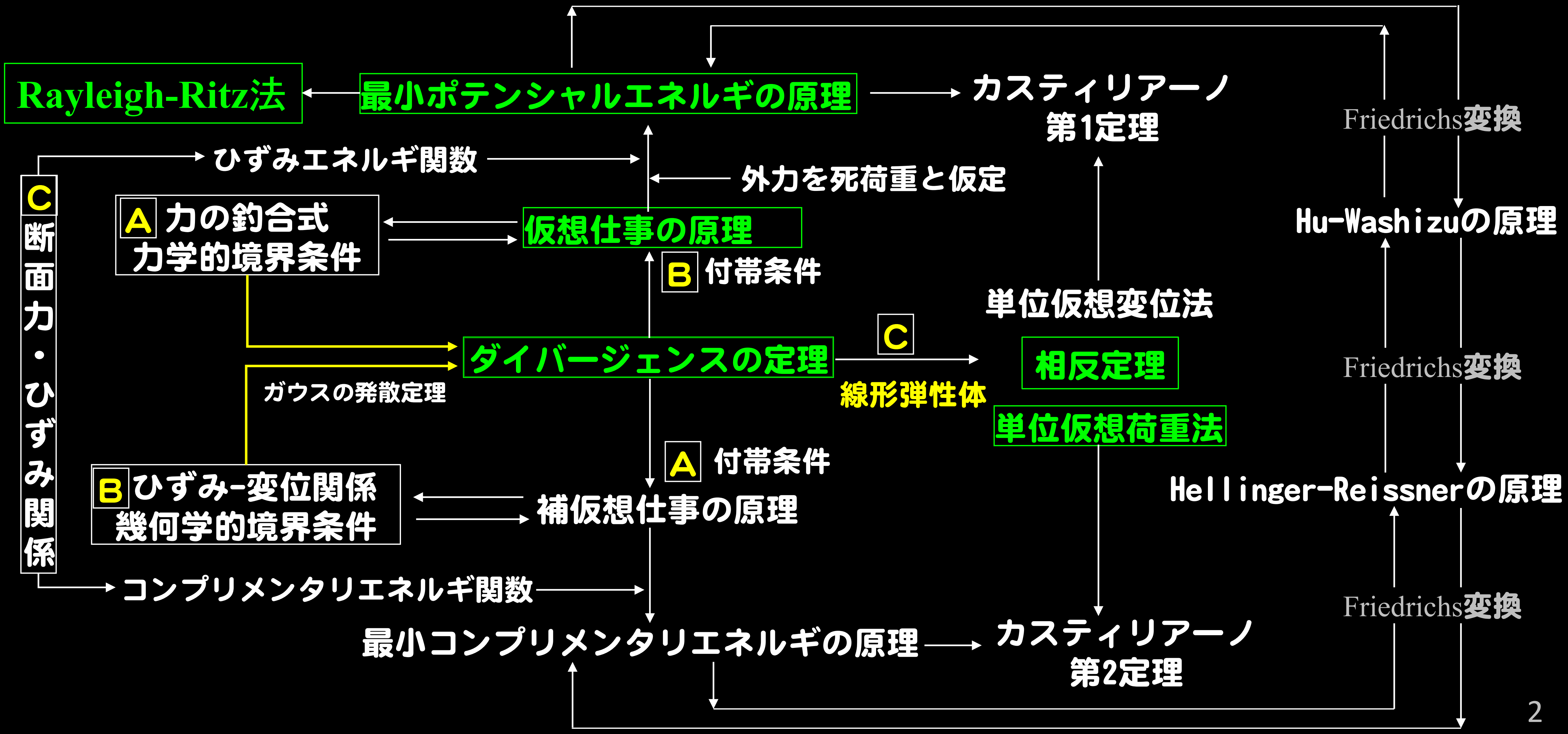
仮想仕事の原理

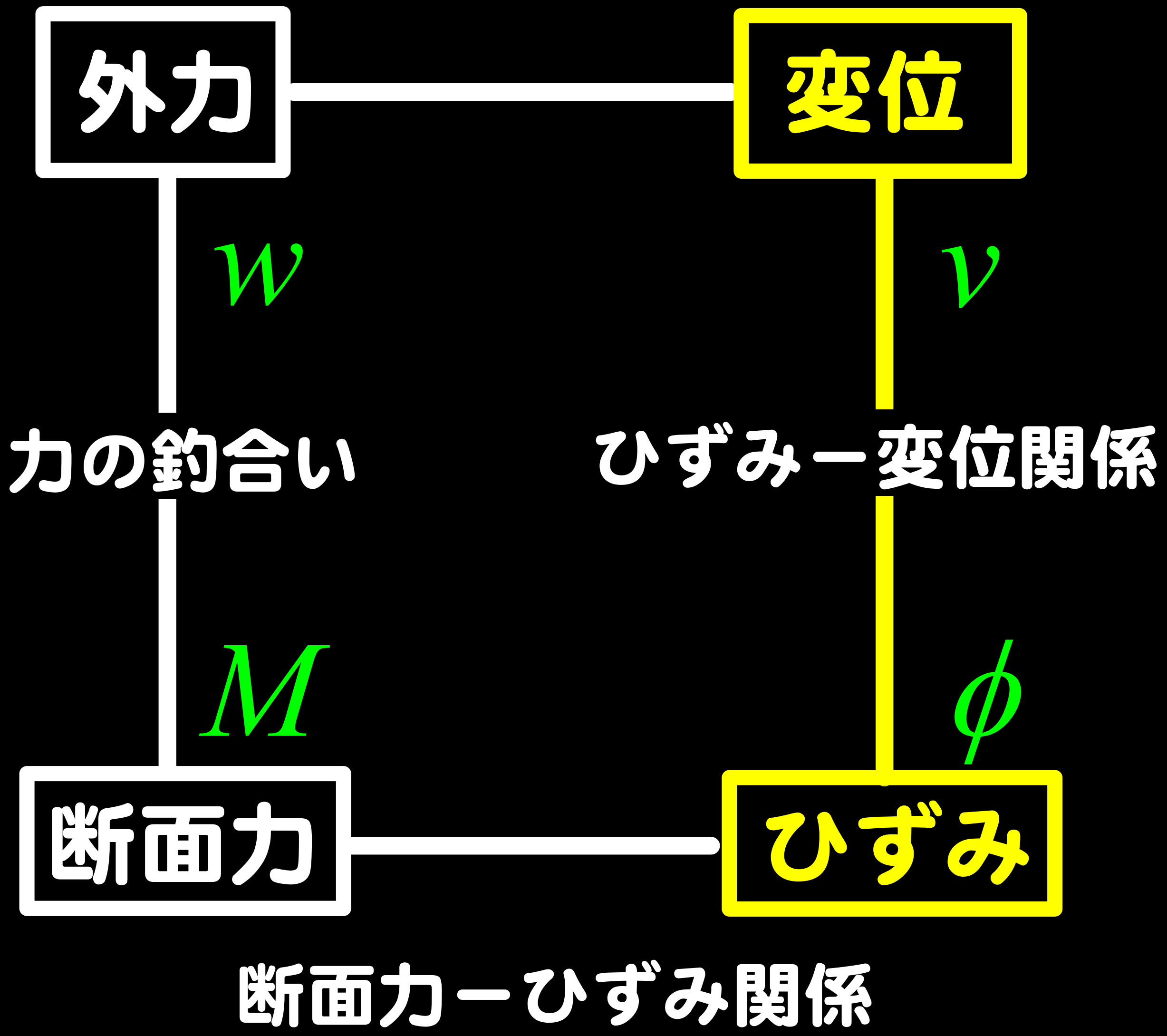
⑮ 仮想仕事の原理とエネルギ原理のまとめ

城戸將江・津田惠吾 2021.07

仕事の原理・エネルギ原理の全体像



構造力学の"構造"1 ①,②



(1) 力の釣合い

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -w(x)$$

(2) ひずみー変位関係

$$\phi(x) = -v''(x)$$

(3) 断面力ーひずみ関係

$$M(x) = EI\phi(x) = -EIv''(x)$$

(4) 外力ー変位関係

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x) = w(x)$$

(5) 境界条件

構造力学の"構造"2 ①,②

境界条件

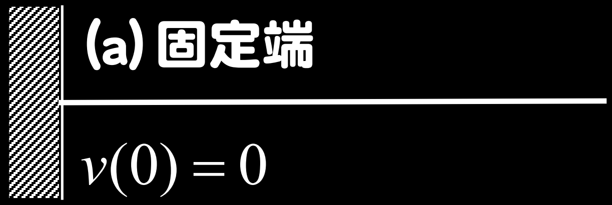
1) 幾何学的境界条件

構造的な支持条件を示した条件

固定端：たわみとたわみ角が0

ピン支点，ローラ支点：たわみが0

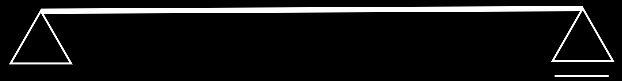
(a) 固定端



$v(0)=0$

$v'(0)=0$

(b) ピン支点



$v(0)=0$ $v(l)=0$

2) 力学的境界条件

境界での外力と断面力の釣合い条件

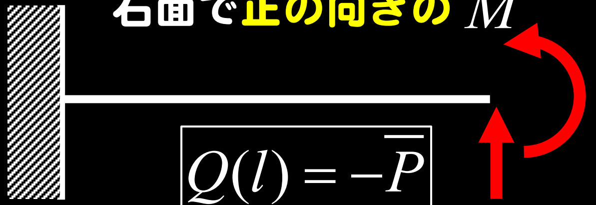
$x=0$ $x=l$

右面で負の向きの $\overline{M}$

$\boxed{M(0)=0}$ $\boxed{M(l)=-\overline{M}}$

$\Rightarrow -EIv''(0)=0 \Rightarrow v''(0)=0$ $\Rightarrow -EIv''(l)=-\overline{M}$

右面で正の向きの $\overline{M}$

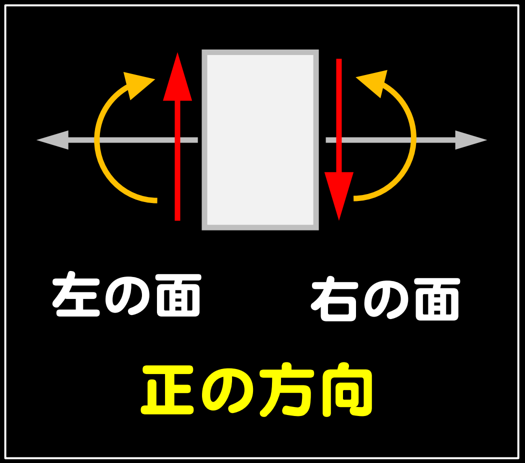


$\boxed{Q(l)=-\overline{P}}$

$\boxed{M(l)=\overline{M}}$

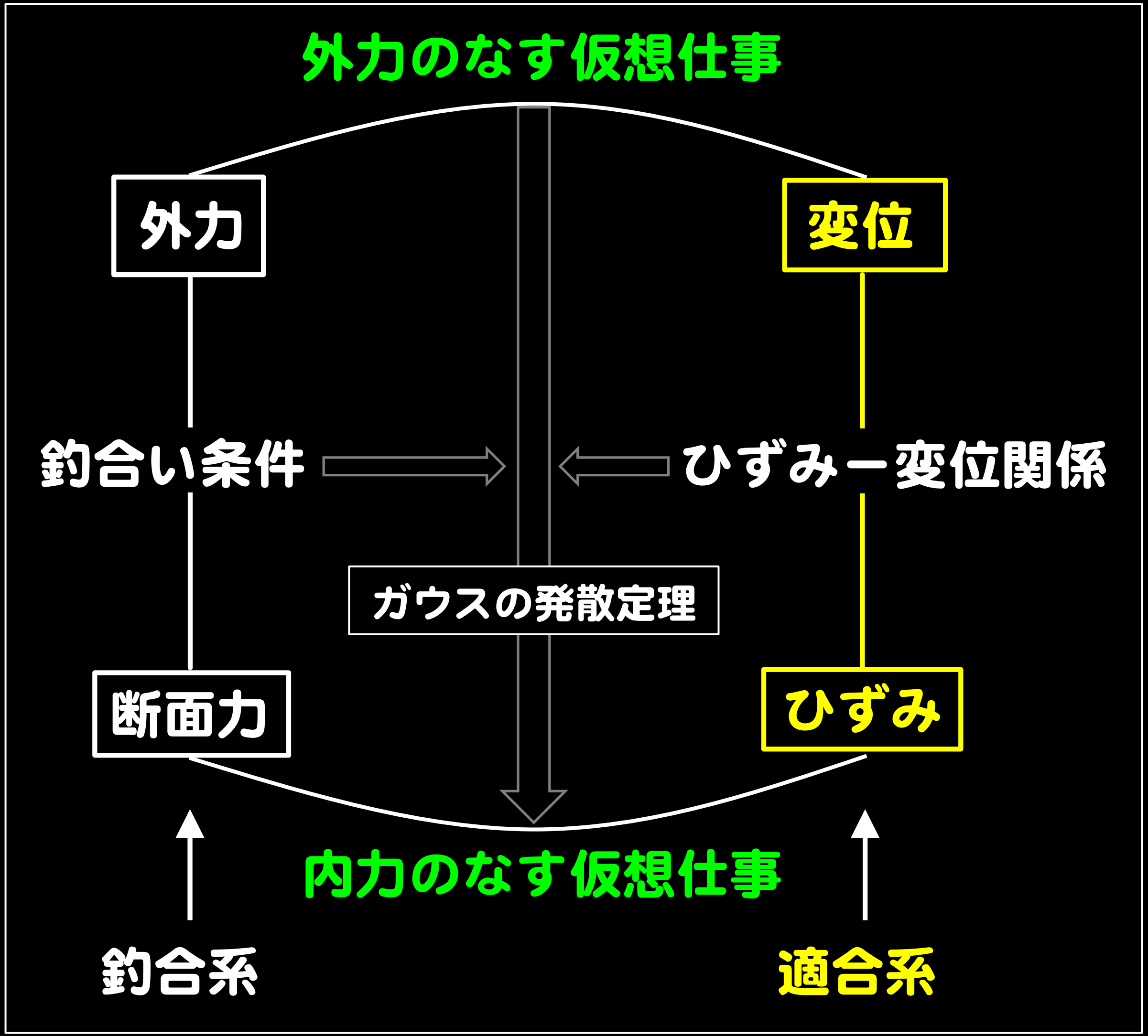
$\overline{P}$

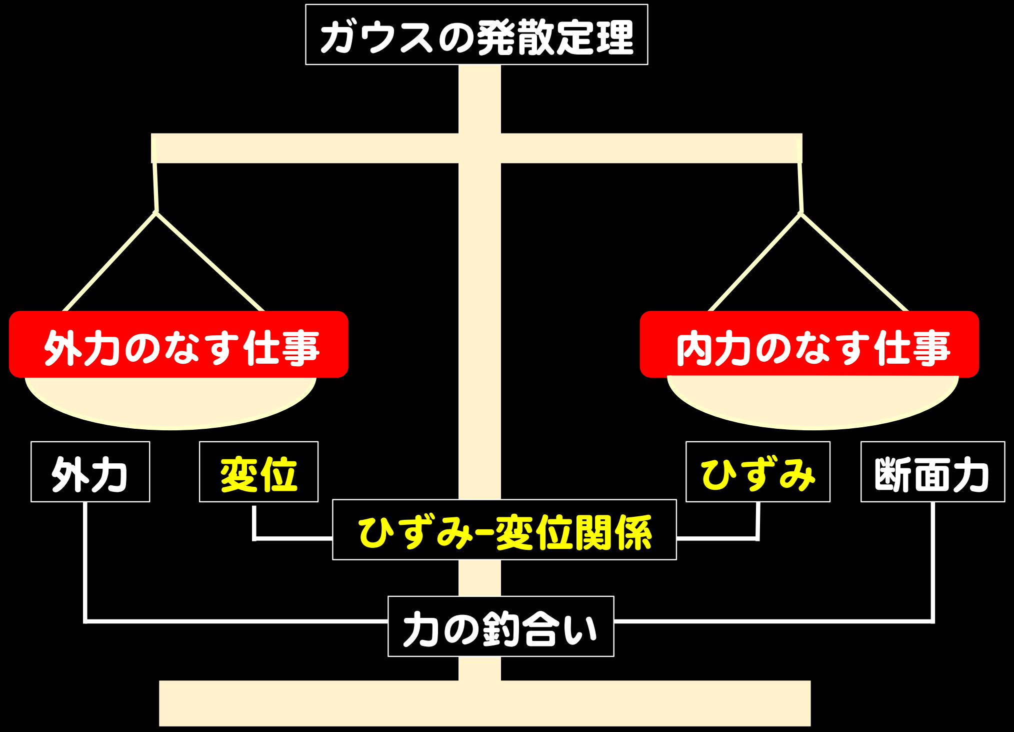
負の向きの $\overline{P}$

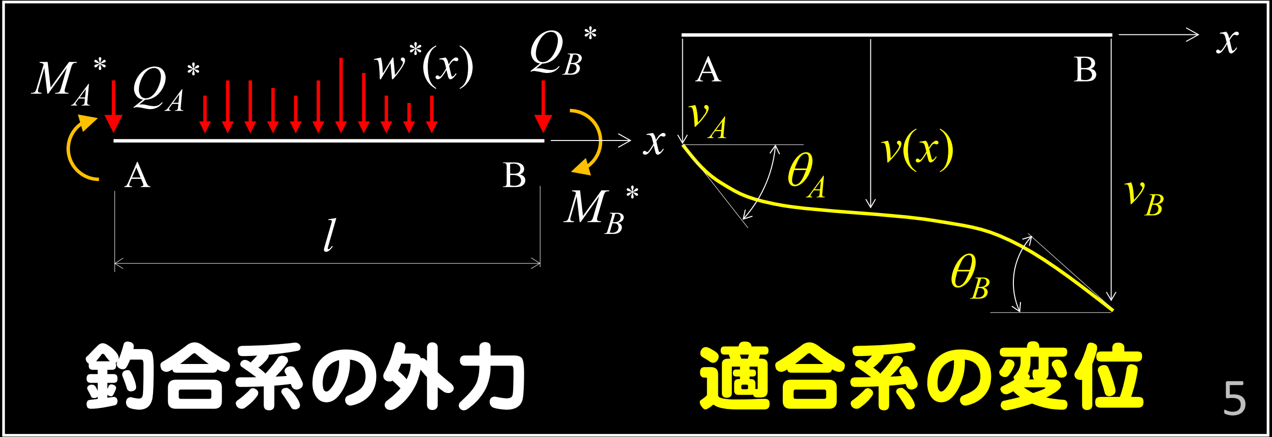


ダイバージェンスの定理1 ③,④

外力のなす仮想仕事＝内力のなす仮想仕事







ダイバージェンスの定理2 ③,④

ダイバージェンスの定理式

$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x)dx$$

釣合系の外力が適合系の変位に対してなす仕事は，釣合系の内力が適合系のひずみに対してなす仕事に等しい．

ガウスの発散定理

1）釣合系

釣合い式 $Q^{*\prime}(x) = -w^*(x),\ \ Q^*(x) = M^{*\prime}(x)$

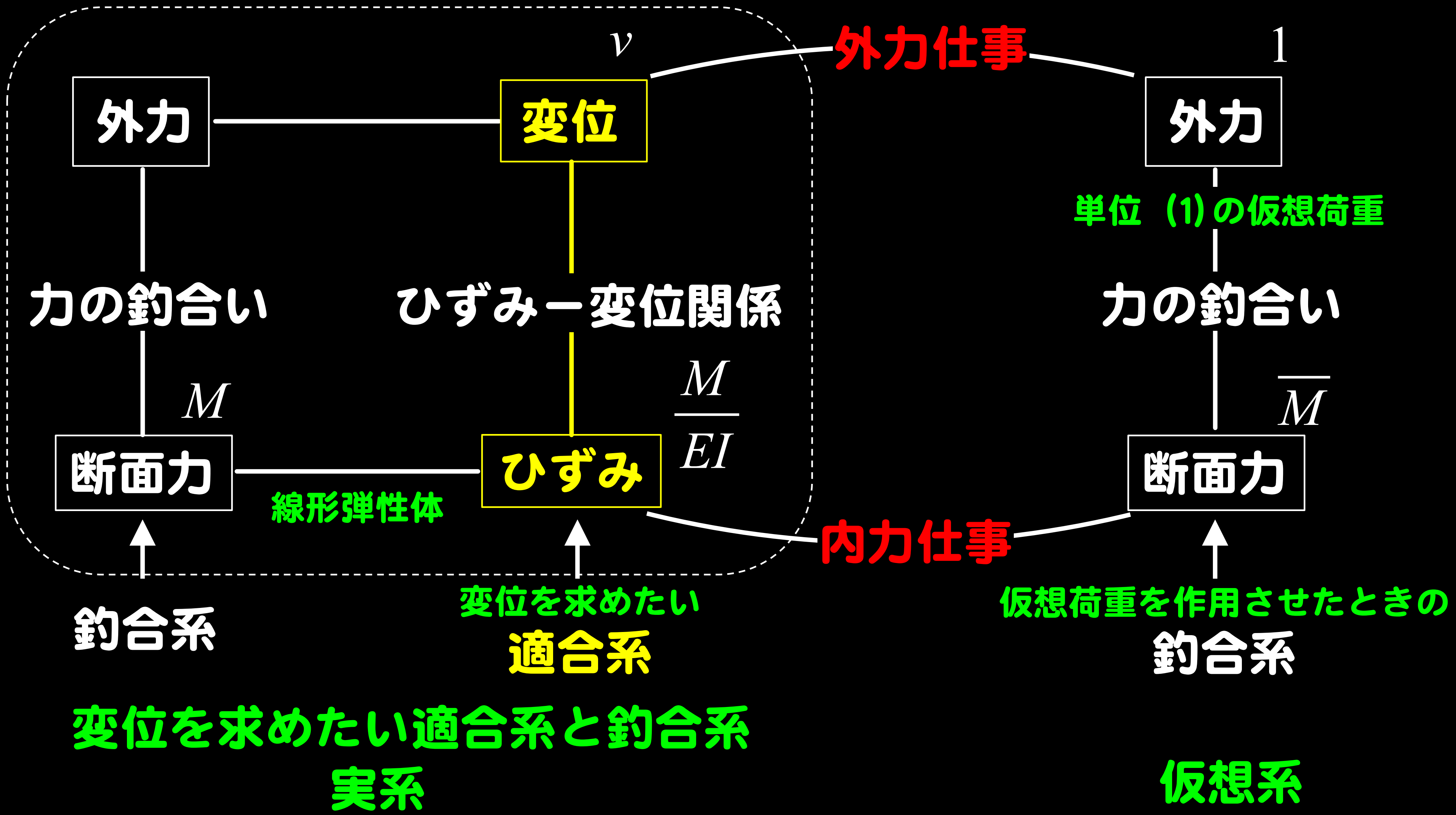
力学的境界条件 $Q_A^* = -Q^*(0),\ \ M_A^* = M^*(0),\ \ Q_B^* = Q^*(l),\ \ M_B^* = -M^*(l)$

2）適合系

ひずみー変位関係 $\phi(x) = -v''(x)$

幾何学的境界条件 $v_A = v(0),\ \ \theta_A = v'(0),\ \ v_B = v(l),\ \ \theta_B = v'(l)$

単位仮想荷重法1 ⑤,⑥



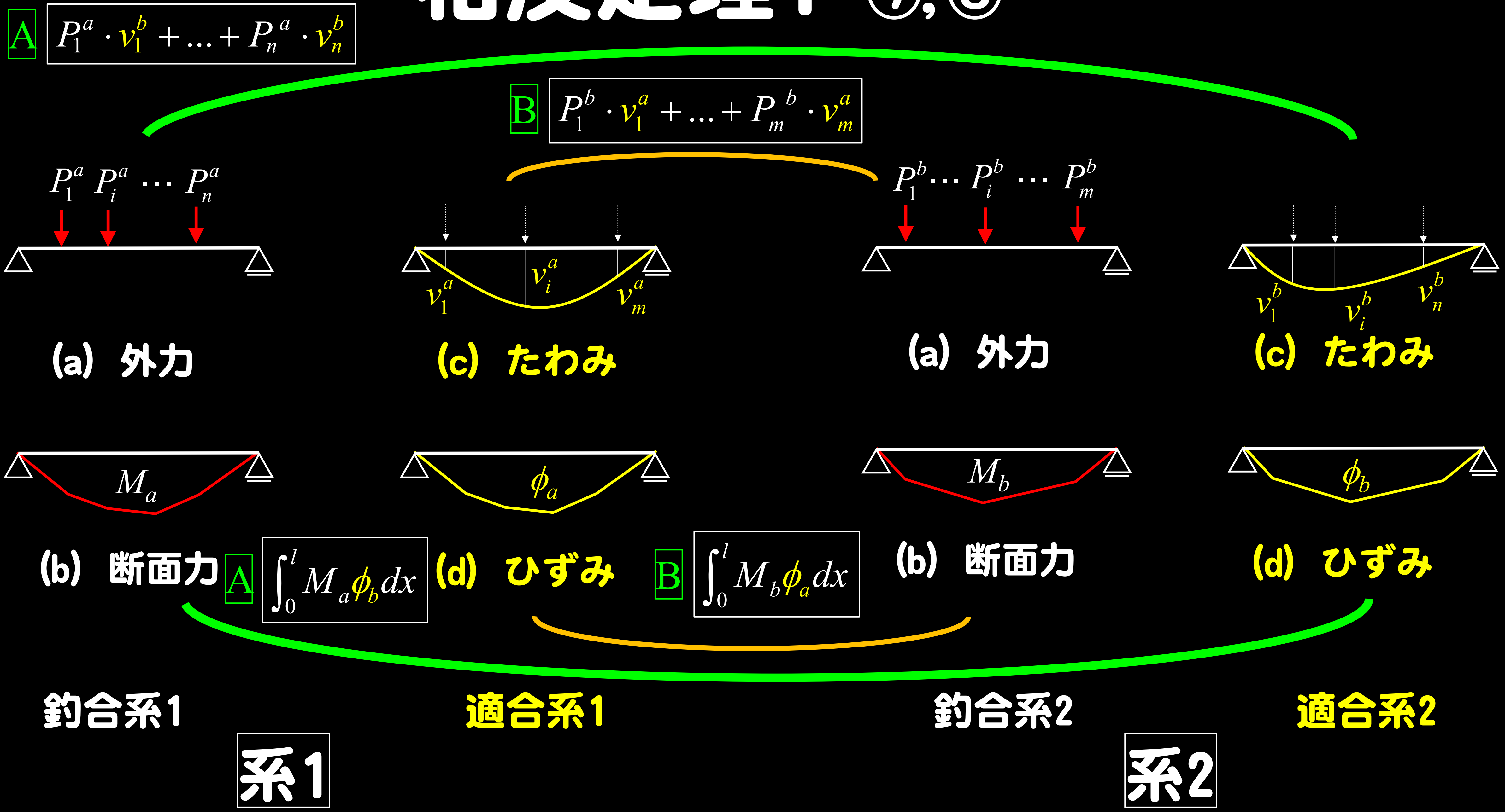
v
外力
変位
外力仕事
1
外力
単位（1）の仮想荷重
力の釣合い
ひずみ－変位関係
力の釣合い
M
M/EI
$\overline{M}$
断面力
ひずみ
断面力
線形弾性体
内力仕事
釣合系
変位を求めたい
適合系
仮想荷重を作用させたときの
釣合系
変位を求めたい適合系と釣合系
実系
仮想系

単位仮想荷重法2 ⑤,⑥

$$v = \int_l \frac{M \bar{M}}{EI} dx$$

任意点のたわみ（たわみ角）は，たわみ（たわみ角）を求めたい点・求めたい方向に単位1の荷重（モーメント荷重）を作用させたときの曲げモーメントを$\bar{M}$，元々の系の曲げモーメントをMとすると上式で算定できる．

相反定理1 ⑦,⑧



A $P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$
B $P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$
P_1^a P_i^a … P_n^a
v_1^a v_i^a v_m^a
P_1^b … P_i^b … P_m^b
v_1^b v_i^b v_n^b
(a) 外力
(c) たわみ
(a) 外力
(c) たわみ
M_a
ϕ_a
M_b
ϕ_b
(b) 断面力
A $\int_0^l M_a \phi_b dx$
(d) ひずみ
B $\int_0^l M_b \phi_a dx$
(b) 断面力
(d) ひずみ
釣合系1
適合系1
釣合系2
適合系2
系1
系2

相反定理2 ⑦,⑧

用いた関係

$$M = EI\phi$$

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$$

$$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$$

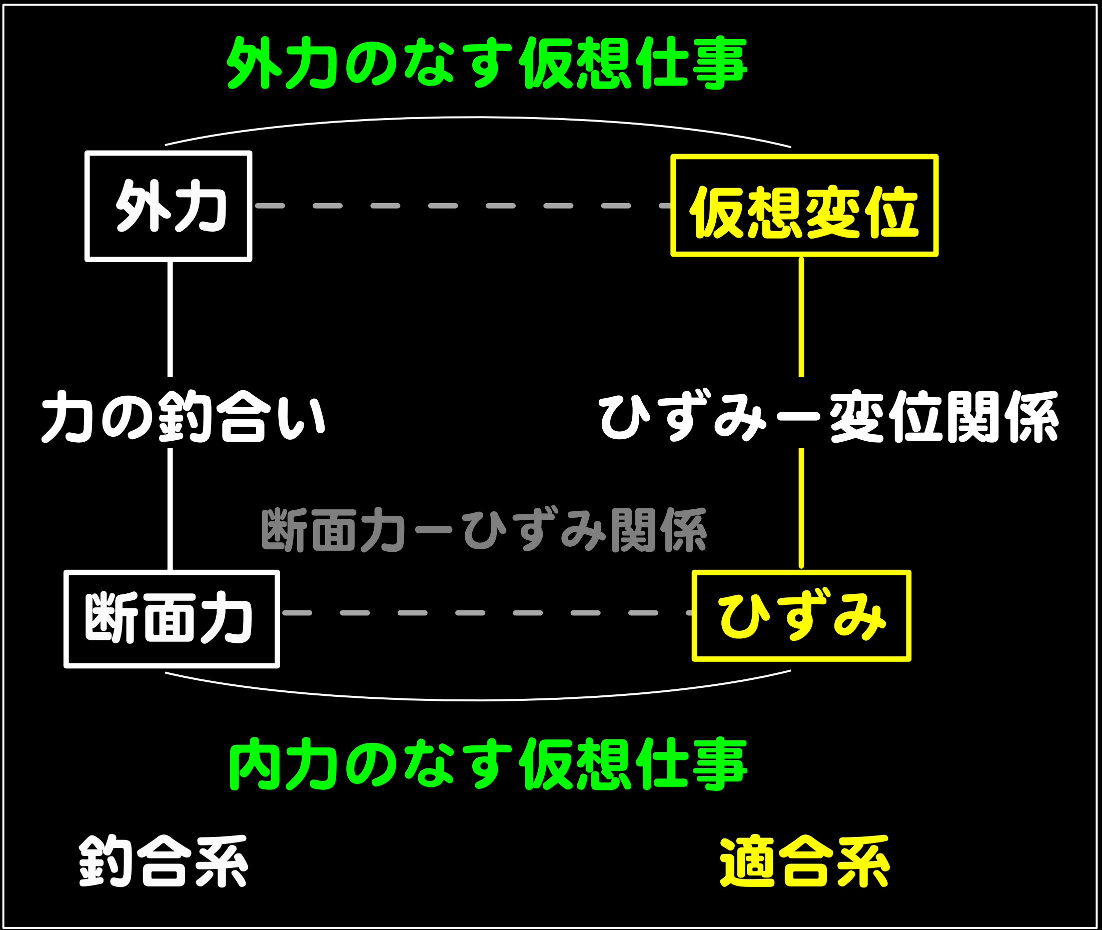
(a) 外力　系1　(c) たわみ　(a) 外力　系2　(c) たわみ

相反定理式

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$$

系1の外力が系2のたわみに対してなす仕事は，系2の外力が系1のたわみに対してなす仕事に等しい

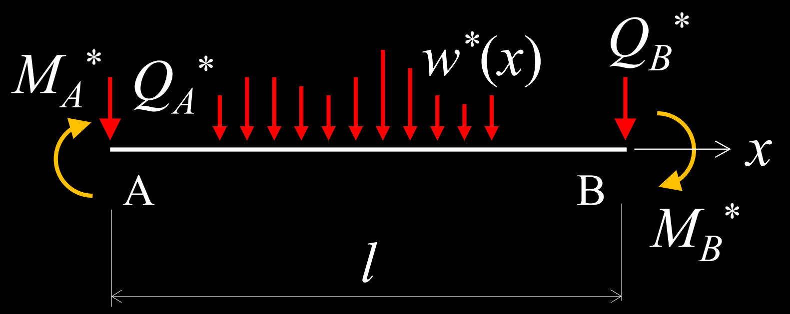
仮想仕事の原理1 ⑨, ⑩



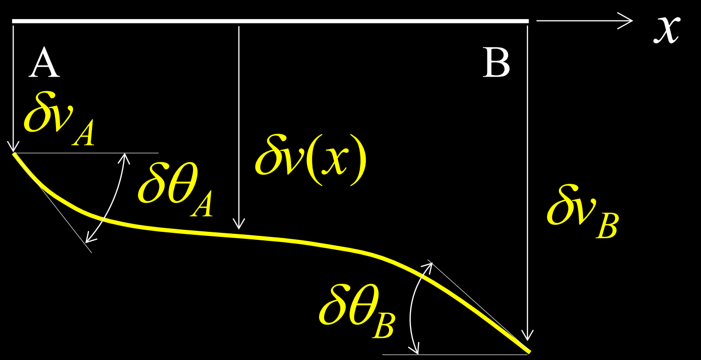
外力のなす仕事
=内力のなす仕事

ひずみ－変位関係と幾何学的境界条件を付帯条件とする

仮想仕事式より，釣合い式と力学的境界条件が得られる．



釣合系の外力



適合系の変位

釣合系の　適合系の　釣合系の　適合系の

$$\Sigma\,(\text{外力}\times\text{仮想変位}) = \int_l (\text{曲げモーメント}\times\text{曲率})\ dx$$

仮想仕事の原理2 ⑨, ⑩

仮想仕事式

$$Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta\theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta\theta_B + \int_0^l w^*(x)\delta v(x)dx = \int_0^l M^*(x)\cdot\delta\phi(x)dx$$

幾何学的境界条件を満足する任意の仮想変位とこの仮想変位に対応するひずみを適合系として，釣合系の外力のなす仮想仕事は内力のなす仕事に等しい。

ガウスの発散定理

釣合い微分方程式

$$M^{*\prime\prime}(x) + w^*(x) = 0$$

ひずみ－変位関係

$$\delta\phi(x) = -\delta v''(x)$$

力学的境界条件・幾何学的境界条件

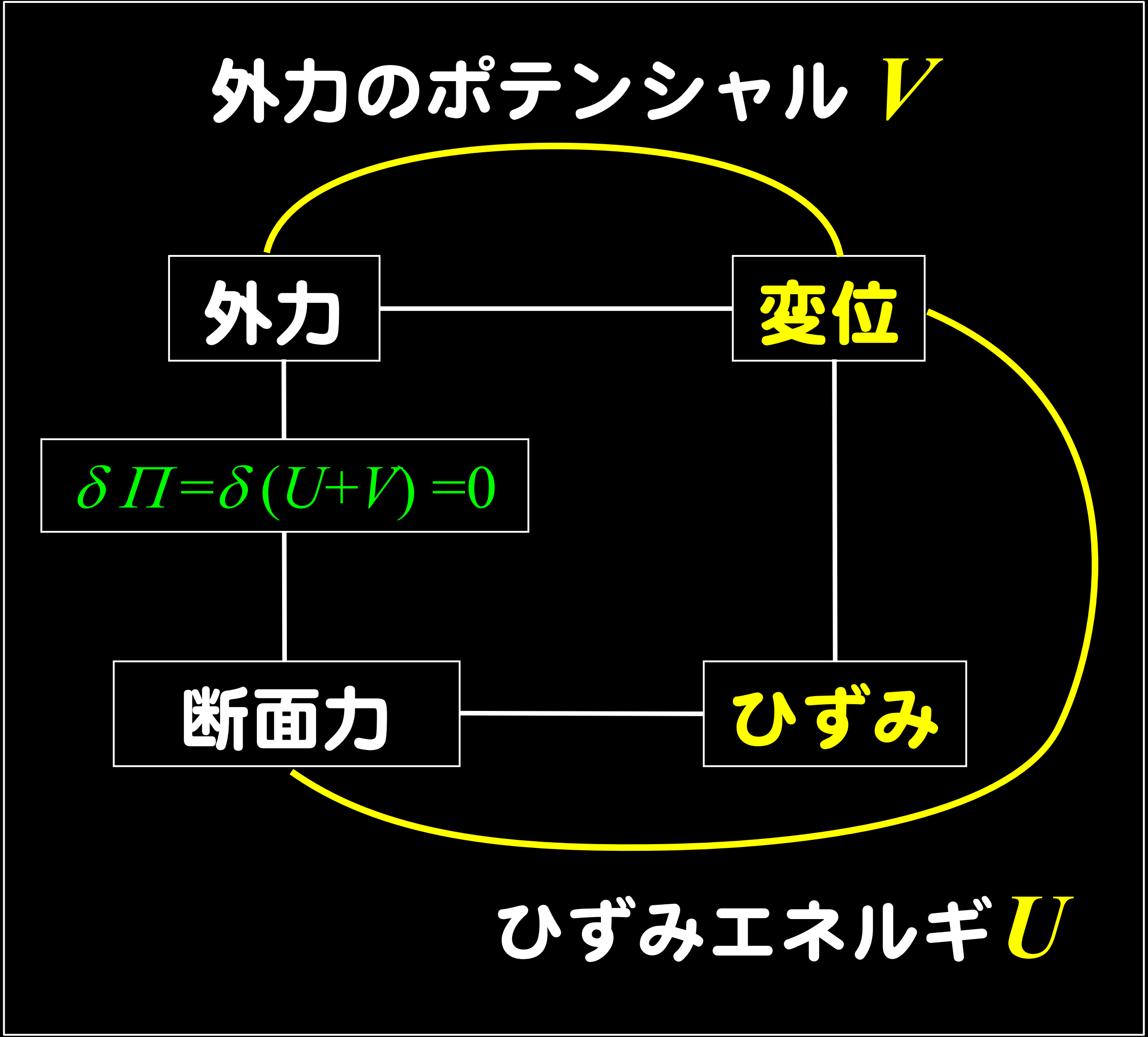
$$\left(Q_A^* + M^{*\prime}(0)\right)\cdot\delta v(0) = 0$$

$$\left(M_A^* - M^*(0)\right)\cdot\delta v'(0) = 0$$

$$\left(Q_B^* - M^{*\prime}(l)\right)\cdot\delta v(l) = 0$$

$$\left(M_B^* + M^*(l)\right)\cdot\delta v'(l) = 0$$

最小ポテンシャルエネルギの原理1⑪,⑫



全ポテンシャルエネルギ

$$\Pi=U+V$$

最小ポテンシャルエネルギの原理

$$\Pi(v^*)\geqq\Pi(v)$$

v ：正解のたわみ,
v^*：幾何学的境界条件を満足する任意のたわみ

最小ポテンシャルエネルギの原理2⑪,⑫

$$\Pi\ (v^*) \geq \Pi\ (v)$$

幾何学的境界条件を満足する変位のなかで，正解が全ポテンシャルエネルギΠを最小にする．

↓

第一変分$\delta\Pi = 0$

↓

変位で表現した釣合い微分方程式・力学的境界条件

近似解法 Rayleigh-Ritz 法1 ⑬, ⑭

$\Pi\ (v^*) \geqq \Pi\ (v)$

a_i：一般化座標
$f_i(x)$：基底

第一変分 $\delta\Pi = 0$

変位で表現した
釣合い微分方程式
力学的境界条件

変位を仮定

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

全ポテンシャルエネルギ
$\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$\frac{\partial \Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

近似解法 Rayleigh-Ritz 法2 ⑬, ⑭

全ポテンシャルエネルギ Π

$$\Pi = U + V = \int_l \frac{EIv''^2}{2}dx - \frac{P}{2}\int_l v'^2 dx + \sum_j {}_PV_j + \sum_k {}_MV_k + {}_wV$$

$$\boxed{\frac{\partial \Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)}$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

a_i：一般化座標
$f_i(x)$：基底

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \sum_{m=1}^{n}\left\{EI\int_l f_m''(x) f_i''(x)dx - P\int_l f_m'(x) f_i'(x)dx\right\}\cdot a_m$$

$$-\sum_j P_j \cdot f_i(x_j) - \sum_k \overline{M}_k \cdot f_i'(x_k) - \int_l w(x)\cdot f_i(x)dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

おわりに 1

1) 仮想仕事の原理を正しく示したい。
2) 仮想仕事の原理は難しいものではない。
3) 境界条件の重要性を強調する。
4) 仕事の原理・エネルギの原理の理解により，
   構造力学の構造・全体像が把握できる。
5) ダイバージェンスの定理を根幹とした。
6) 補仮想仕事の原理，最小コンプリメンタリエネルギ，
   カスティリアーノの定理は説明しなかった。
   ⇒ 仮想仕事の原理等と相補的な関係
7) 理解し活用できるためには，鉛筆を持った計算を。
8) 建築士の試験には役に立たないが，構造力学の理解には役立つ。

おわりに 2

本一連の動画を作成したのは，

1) 仮想仕事の原理を主題とした本が少ないこと

2) 構造力学の本には仮想仕事の原理について記述した物は沢山あるが，構造力学の教科書として多くのスペースを割けないことがあるかもしれないものの，説明の多くは"天下り"的であり，構造力学を嫌いになる学生や技術者が出てくるのではないかと危惧したからである．仮想仕事の原理が難しいと言われるのは，言葉での説明（例えば，「外力のなす仕事は内力のなす仕事に等しいとすると...」）では，腑に落ちない状況に陥るためではないかと考えている．弾性論で通常行われているように，式の展開で仮想仕事式を導けば，それが一番理解しやすい説明だと考えている．

内容に間違いなどあるかもしれない．ご感想やご指摘を賜れば幸いです．

参考文献

1) 津田恵吾，城戸將江：仮想仕事の原理とエネルギ原理，鹿島出版会，2018.9
2) 津田恵吾 編著：建築構造力学，オーム社，2010.9
3) 鷲津久一郎：エネルギ原理入門，培風館，1996.10
4) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，培風館，1973.2
5) K. Washizu ：Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1968
6) 和泉正哲：建築構造力学2，培風館，1997.9
7) 田中 尚：建築骨組の力学　基礎編，演習編，1995.9
8) 田村 武：構造力学　－仮想仕事の原理を通して－，朝倉書店，2003.2
9) 加藤 勉：仮想仕事の原理と応用，鹿島出版会，2013.4
10) C. L. ディム，I. H. シャームス：材料力学と変分法，ブレイン図書，1977.11
11) Y. C. ファン：固体の力学／理論，培風館，1974.9

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年7月版

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月